Facharbeit im Leistungskurs Mathematik

Taylorreihenentwicklung - Herleitung und Anwendungsbeispiele

erstellt von Martin Bretschneider
im März 2000

Otto-Hahn-Gymnasium Springe

Abbildung 1: Brook Taylor

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Als ich vor über 11 Jahren diese Facharbeit verfasst habe, war die Suchmaschine Google noch ein Geheimtipp und Wikipedia wurde erst später gegründet und nach einigen Jahren so erfolgreich wie heutzutage. Recherchiert habe ich damals in Stadt- und Universitätsbibliotheken mit Karteikarten in Schlagwortkatalogen. Seit 2002 ist diese Facharbeit über meine Webseite verfügbar und ist bei Suchbegriffen wie *Facharbeit und Taylorreihe* auf den ersten Suchergebnisplätzen bei Google und bei *Mathe und Facharbeit* immerhin auf der zweiten oder dritten Seite. Somit wurde dieses Dokument inzwischen mehrere Tausend Mal heruntergeladen und gelesen, wahrscheinlich von Schülern, die selber eine entsprechende Facharbeit schreiben werden.

Martin Bretschneider im August 2011

2 Resümee

2.1 Einleitung

Diese Facharbeit beschäftigt sich sich mit der Herleitung und Anwendungsbeispielen der Taylorreihe. Diese Reihe gilt als fundamentales Instrument zur lokalen Untersuchung von Funktionen: So ist es möglich, fast alle beliebigen Funktionen nachzubilden, wobei die Genauigkeit dieser Nachbildung beliebig gewählt werden kann.

Die Anwendungen, die gezeigt werden, beschäftigen sich mit der Berechnung des Funktionswertes elementarer Funktionen an einer Stelle, um unter anderem die Eulersche Zahl e auf zehn Nachkommastellen genau zu berechnen (siehe Kapitel 6.1).

Da der Umfang dieser Facharbeit begrenzt ist, kann nicht alles, was mit der Taylorreihe in Verbindung steht, erwähnt werden, vielmehr musste ich eine Auswahl treffen und habe dabei folgenden Aufbau gewählt: Ich erläutere ich den Begriff der Reihen und deren Konvergenz, dann leite ich die Taylorreihe her und zeige schließlich Möglichkeiten ihrer Anwendungen. Zunächst werde ich eine Kurzbiographie voranstellen:

2.2 Zur Person Taylors

Der englische Mathematiker Brook Taylor wurde 1685 in Edmonton in der Nähe von London geboren und starb 1731 in London. Nachdem er anfangs Rechtswissenschaften studiert hatte, vergrößerten sich seine Interessen in Richtung zur Mathematik, zu Naturwissenschaften aber auch zur Musik, so dass er 1708 seine erste mathematische Arbeit über den Schwingungsmittelpunkt verfasste.

1709 erwarb er den Grad eines Baccalaureus der Rechte, 1714 die juristische Doktorwürde. 1712 wurde er Mitglied der Royal Society in London, dessen erster Sekretär er von 1714–1418 war, und im gleichen Jahr gab er seine Entdeckung seiner allgemeinen Reihenentwicklung bekannt. Ebenfalls 1712 war er Vorsitzender eines Komitees, dessen Vorsitzender er bei den mehrfachen Plagiatsstreitigkeiten besonders zwischen Newton, dessen Schüler er war, und Leibniz; somit war Taylor in diese Streitigkeiten persönlich beteiligt. 1715 gibt er sein *Methodus Incrementorum directa et inversa* (Direkte und Inverse Methode der Inkremente) heraus, in dem er auch seine Reihenentwicklung beweist. Dieses, sein Hauptwerk, machte ihn besonders unter den Gelehrten Englands berühmt. In diesem Buch befasste er sich außerdem mit Untersuchungen über singuläre Lösungen von Differentialgleichungen, über höhere Kurven und stellte eine exakte Theorie der für die musikalische Akustik wichtigen Saitenschwingung auf. Er verfasste noch weitere mathematische Bücher bis er sich 1719 wegen seiner angeschlagenen Gesundheit von seinem Amte in der Royal Society befreien ließ.

Er reiste nun, um seinen Zustand zu bessern und befasste sich mit Metaphysik, Moral und Religion. Nachdem sich seine Gesundheit gebessert hatte, verfasste er wieder einige Bücher. Dann heirate Taylor, nachdem seine erste Frau nach zwei Jahren Ehe gestorben ist, ein zweites Mal. Seine zweite Frau allerdings starb 1730, ein Jahr, nachdem sein Vater gestorben ist. Kurz zuvor hatte Taylor wieder ein mathematisches Buch verfasst, beschäftigte sich dann aber wieder mehr mit philosophisch-religiösen Gedanken. In seinem letzten unvollendeten Werk mit dem Titel *Contemplatio Philosophica* geht dem es um die Substanz und ihren verschiedenen Inhalten. Am 29. 12. 1731 stirbt Brook Taylor.

3 Grundlagen

3.1 Folgen

Zuerst möchte ich eine unendliche Menge von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ betrachten. Sind diese in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet, wird von einer unendlichen Zahlenfolge gesprochen. Eine Folge gilt als gegeben, wenn eine Regel bekannt ist, nach der jedes beliebige Glied bestimmt werden kann, was dem Bildungsgesetz entspricht. Häufig lässt sich eine Formel für das allgemeine Glied a_n angeben:

$$a_n = n : 1, 2, 3, 4, 5$$
$$a_n = 4 + 3(n-1) : 4, 7, 10, 13, 16 \ldots$$

Neben den unendlichen Folgen gibt es auch endliche Folgen, die nur eine bestimmte Anzahl von Gliedern besitzen, die aber in dieser Facharbeit von geringer Bedeutung sind.

3.2 Reihen

Ich kann nun eine unendliche Zahlenfolge $\{a_k\}$ auch folgendermaßen darstellen:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} = a_k .$$

Dieser Ausdruck wird unendliche Reihe genannt. Hier ist das Argument a_k der allgemeine Ausdruck für die Glieder der Reihe, deren Anzahl mit den Summandindizes $k=1$ und ∞ angegeben wird: Die Reihe beginnt bei a_1, worauf, wegen des Unendlichkeitsargumentes ∞, unendlich viele Glieder folgen.

3.3 Potenzreihen

Die wichtigsten Funktionsreihen sind die Potenzreihen, aus denen ich auch die Taylorreihe entwickeln werde, die folgendermaßen aussehen:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) .$$

Potenzreihen haben die folgende Formen:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ oder}$$

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n ,$$

wobei die Koeffizienten a_n und die Entwicklungsstelle a Konstanten sind. An der Entwicklungsstelle $a=0$ geht die zweite in die erste Form über.
Die Taylorreihe, die es zu entwickeln gilt, ist eine Potenzreihe, die sich wegen ihrer Glieder $a_n x^n$ durch große Flexibilität auszeichnet.

4 Konvergenz

4.1 Definition

Der Konvergenz hat seinen Ursprung in dem spätlateinischen Verb *convergere*, was wörtlich *sich hinneigen* bedeutet, aber zulaufen und übereinstimmen heißen kann. In der Mathematik bedeutet die Konvergenz einer Funktion das Vorhandensein eines Grenzwertes, den der Funktionswert $f(x)$ an einer beliebigen Stelle x nicht über- oder unterschreitet. Es wird dann gesagt, dass eine Reihe konvergent zu einem Grenzwert ist oder dass sie konvergiert.
Für die Taylorreihe ist die Konvergenz unabdingbar, damit die anzunähernde Funktion überhaupt nachgebildet werden kann. Existiert der Grenzwert einer Reihe nicht, kann ein endlicher Funktionswert, der mit dem Funktionswert der Funktion korrespondiert, nicht dargestellt werden.
In der unendlichen Reihe kann ich folgende Summen bilden, die Partial- oder Teilsummen genannt werden:

$$S_1=a_1, \qquad S_2=a_1+a_2, \qquad S_3=a_1+a_2+a_3, \qquad S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Existiert nun für die unendliche Folge der Partialsummen $\{S_n\}$ ein Grenzwert, so liegt eine konvergente Reihe vor. Dieses kann ich so ausdrücken:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Dieser Grenzwert wird Summe genannt. Existiert er nicht, wird von einer divergenten Reihe gesprochen. In diesem Fall können die Partialsummen unbegrenzt wachsen oder oszillieren.
Ich werde im Folgenden nicht mehr von dem Grenzwert der Partialsummen einer unendlichen Folge sprechen, sondern diesen Grenzwert einer unendlichen Reihe nennen.

4.2 ein notwendiges Konvergenzkriterium

Ein sehr einfaches und sehr praktisches Kriterium für die Konvergenz einer unendlichen Reihe ist das folgende.
Ich betrachte eine konvergente Reihe a_n, deren Summe S ist. Wenn ich ich Partialsummen aus Kapitel 4.1 umstelle, erhalte ich $a_1=S_1, \qquad a_2=S_2-S_1, \dots a_n=S_n-S_{n-1}$. Da die Reihe konvergiert, gilt $lim_{n\to\infty} S_n=lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$.

Für den Grenzwert gilt dann $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} S_n - lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Hiermit habe ich das Konvergenzkriterium $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gefunden, welches zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe ist, was durch ein Vergleich mit der harmonischen Reihe gezeigt werden kann.

4.3 hinreichende Konvergenzkriterien

4.3.1 Quotientenkriterium von d'Alembert

Ein wichtiges hinreichendes Kriterium zur Überprüfung der Konvergenz einer unendlichen Reihe ist das Quotientenkriterium des Franzosen d'Alembert. Es befasst sich mit dem Verhältnis zweier Folgeglieder einer unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} = a_n .$$

Es sagt aus, dass eine Reihe konvergiert, wenn für sie von einem gewissen n alle Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ kleiner als eine Zahl $q < 1$ sind: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$.

Wenn diese Quotienten von einem gewissen n größer als eine Zahl $Q > 1$ sind, ist die Reihe divergent. Diese Aussage möchte ich nun durch einen Vergleich der Reihe a_n mit der harmonischen Reihe $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^k = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ beweisen:

Ich betrachte die harmonische Reihe zunächst für $q < 0$ und erkenne ich sofort, dass sie konvergiert, da ihre Koeffizienten q^n bei wachsendem n gegen 0 streben.

Es gelte also allgemein $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, so dass für andere Glieder $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < q$, $\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < q$ gelte. In diesen Ungleichungen kann ich mit dem Nenner-Glied multiplizieren:

$$a_{n+1} < qa_n , \quad a_{n+2} < qa_{n+1} , \quad a_{n+3} < qa_{n+2} .$$

Jetzt kann ich die Glieder ineinander einsetzen, wobei a_{n+1} sich nicht ändert:

$$a_{n+1} < qa_n$$

$$a_{n+2} < qq\, a_n \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} < q^2 a_n$$

$$a_{n+3} < qqq\, a_n \quad \Rightarrow \quad a_{n+3} < q^3 a_n .$$

Nun stehen auf der rechten Seite der Ungleichungen die Glieder der harmonischen Reihe und auf der linken Seite die Glieder meiner Reihe a_n, wobei die Glieder von a_n immer kleiner als die der harmonischen Reihe sind. Da diese konvergiert, muss a_n auch konvergieren, da ihre Werte geringer sind. Diese Tatsache lässt sich allein logisch erschließen, ist aber auch selbst ein Konvergenzkriterium, und zwar das *Majorantenkriterium*:

Gilt $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dieses Majorantenkriterium lässt sich in das *Minorantenkriterium* umwandeln, wenn aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt.

Mit diesem Minorantenkriterium kann ich jetzt das Quotientenkriterium $\frac{a_{n+1}}{a_n} > Q > 1$ schnell beweisen. Bei $Q > 1$ ist ab einem bestimmten n a_{n+1} größer als a_n, womit das notwendige Konvergenzkriterium, das Vorhandensein einer Nullfolge nicht mehr erfüllt werden kann. Somit muss die Reihe divergent sein, womit auch mein Beweis abgeschlossen.

Es gilt also $lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, wobei für $r < 1$ die Reihe konvergent und für $r > 1$ divergent ist.

Ein Sonderfall tritt auf, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ gilt. Dann kann keine Aussage über die Konvergenz gemacht werden, diese muss dann über andere Verfahren ermittelt werden.

4.3.2 Wurzelkriterium von Cauchy

Ein anderes wichtiges Konvergenzkriterium ist das Wurzelkriterium von Cauchy. Es besagt, dass, wenn $lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, die Reihe für $r < 1$ konvergent und für $r > 1$ divergent ist.

4.3.3 Leibnizsches Konvergenzkriterium

Für die Konvergenz der alternierenden Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \pm a_n \mp \ldots$, in der die a_n positive Zahlen sind, liegt ein hinreichendes Konvergenzkriterium vor, wenn die zwei Bedingungen $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ und $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ erfüllt sind.

5 Herleitung der Taylorreihe

5.1 das Problem

In den beiden vorangegangen Kapiteln habe unendliche Reihen und ihre Konvergenz erörtert, nun möchte ich Funktionen bestimmen, die sich der gesuchten Funktionen *approximieren* (von lat. appropinquare: sich nähern), das heißt, die sich ihr annähern. Diese gesuchten Funktionen sollen die Eigenschaften haben, dass deren Funktionswerte leicht zu bestimmen sind und dass ihre Approximation möglichst genau ist, so dass auch die so berechneten Funktionswerte genau sind.

Dazu betrachte ich nun eine ganzrationale Funktion vom Grade n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_{1\mathrm{x}} + a_0, x \in \mathbb{R}$$

deren Funktionswert ich an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ einfach berechnen kann, indem ich das Horner–Schema anwende:

$$f(a) = (\ldots((a_n a + a_{n-2}) a + a_{n-2}) a + \ldots + a_1) a + a_0 .$$

Für viele andere Funktionen - zum Beispiel $x \to \sin x$, $x \to \sqrt[n]{x}$, $x \to \ln x$ - ist die Berechnung der Funktionswerte komplizierter.

5.2 die Taylorfunktion

Mein Ziel ist es also mit ganzrationalen Funktionen die Approximation durchzuführen. Um hierfür einen Ansatz zu finden, versuche ich einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer ganzrationalen Funktion und ihren Ableitungen zu entwickeln: f ist eine ganzrationale Funktion vom Grade 4 mit dem Funktionsterm

$$\begin{aligned} f(x) &= a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ f^{(1)}(x) &= 4 \cdot a_4 x^3 + 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1 \\ f^{(2)}(x) &= 4 \cdot 3 a_4 x^2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 2 \cdot 1 a_2 \\ f^{(3)}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4 x + 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3 \\ f^{(4)}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 a_4. \end{aligned}$$

Wegen der Einfachheit betrachte ich die Funktion und ihre Ableitungen an der Stelle $x=0$ und erhalte so

$$f(0)=a_0 \Rightarrow a_0=f(0), \qquad f'(0)=1! \cdot a_1 \Rightarrow a_1=f' \frac{(0)}{1!},$$

$$f^{(2)}(0)=2! \cdot a_2 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2 \cdot 1} f''(0), \qquad f^{(3)}(0)=3! \cdot a_3 \Rightarrow a_3=\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} f^{(3)}(0),$$

$$f^{(4)}(0)=4! \cdot a_4 \Rightarrow fa_4=\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} f^{(4)}(0).$$

Die Ergebnisse kann ich in der folgenden Aussage für das Glied n bei a_i zusammenfassen:

$$a_i=\frac{1}{i}! f^{(i)} \quad \textit{für} \quad i \in \{0,\ 1,2,\ 3,4\}.$$

Dies wiederum kann ich für eine beliebige ganzrationale Funktion f vom Grade n mit dem Funktionsterm $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ folgendermaßen verallgemeinern:

$$a_i=\frac{1}{i!} f^{(i)} \quad \textit{für} \quad i \in \{0,1,2,3,4,\ldots n\} \qquad (1)$$

Nach (1) lässt sich jede ganzrationale Funktion f vom Grade n durch den Funktionswert $f(0)(=f^{(0)}(0))$ und die Ableitungswerte $f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ mit diesem Satz beschreiben:

$$f: x \to \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i}! f^{(i)}(0) x^i, \qquad x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung und zwar für den Fall, dass die Funktionswerte an der Stelle 0 bekannt sind. Wenn sie an irgendeiner Stelle $a \in \mathbb{R}$ vorhanden sind, lässt sich der Funktionsterm

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_{1x} + a_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ so umformen:

$$f(x)=a_n((x - a) + a)^n + a_{n-1}((x - a) + a)^{n-1} + a_1((x - a) + a) + a_0 .$$

Diesen Term forme ich durch Auspotenzieren und Umordnen nach

$$f(x)=c_n(x-a)^n+c_{n-1}(x-a)^{n-1}+\ldots+c_1(x-a)+c_0 \qquad (3)$$

um und erhalte neue Koeffizienten $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_{1,} c_0 \in \mathbb{R}$.

Wenn ich nun aus (3) den Ableitungswert $f^{(i)}(a), i \in \mathbb{R}\{0,1,2,\ldots,n\}$ bestimme, liefert nur das Glied $c_i(x-a)^i$ einen Beitrag zum Funktionswert, da die anderen Glieder, wie schon oben gezeigt, 0 sind, so dass ich dieses erhalte:

$$f^{(i)}(a)=1!\,c_i, \quad \Leftrightarrow \quad c_i=\frac{1}{1!}(a).$$

Also ist analog zu (2),

$$f: x \to \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i}!\,f^{(i)}(a)(x-a)^i, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (4).$$

Nach (4) ist eine ganzrationale Funktion vom Grade n dann eindeutig festgelegt, wenn an einer Stelle a sämtliche Ableitungswerte $f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ bekannt sind. Wenn eine Stelle $a \in \mathbb{R}$ und reelle Zahlen $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ vorgegeben sind, gibt es genau eine ganzrationale Funktion f vom Grade n, so dass für alle $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ $f^{(i)}(a)=y^i$ gilt; dies ist nämlich die Funktion

$$f: x \to \sum_{i=0}^{n} y^{(i)}(x-a)^i, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Die Darstellung (4) bezieht sich nur auf ganzrationale Funktionen, ich möchte aber den Satz (4) auch auf andere, nicht ganzrationale, also gebrochen-rationale, Funktionen erweitern. Dazu muss ich aber zwei Dinge beachten:

- Die Funktion darf an der Stelle a, an der ich zum Beispiel die Funktionswerte der Ableitungen kenne, keine Definitionslücke besitzen. Dies wäre bei $x \to \ln x$ an der Stelle 0 oder bei $x \to \frac{x^3}{x-4}$ an der Stelle 4 der Fall.
- Da ich mit Ableitungen von Funktionen arbeite, muss die zu approximierende Funktion so oft differentierbar sein, wie ich es benötige. Im späteren Verlauf dieser Arbeit wird sich zeigen, dass sich Approximation einer Funktion f bei höherem Grade der Approximationsfunktion verbessert, weswegen ich einen möglichst hohen Grad erreichen möchte.

Dies lässt sich so formulieren:

Ist f auf einer zusammenhängenden Menge A definiert und n-fach differentierbar und $a \in A$, so gibt es genau eine ganzrationale Funktion P_n, deren Grad höchstens n ist und für die gilt:

$$f(a)=P_n(a), f'(a)=P_n'(a), \ldots; f^{(n)}(a)=P_{(n)}^{(n)}.$$

Nach (4) ist dies die Funktion

$$P_n: x \to \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (5).$$

Ich nenne diese Funktion P_n die *Taylorfunktion* der Ordnung n zu f an der Stelle a.

Gilt für die Entwicklungsstelle $a=0$, geht die Taylorfunktion in die *MacLaurinfunktion* (nach C. MacLaurin, 1698–1746) über:

$$P_n: x \to \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i}! f^{(i)}(0) x^i, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (6).$$

5.3 das Restglied

Da f und P_n an der Stelle a den gleichen Funktionswert besitzen und auch in den ersten n Ableitungswerten übereinstimmen, kann ich hoffen, dass sich die Übereinstimmungen an der Stelle a auch auf andere Stellen x auswirkt. Nun möchte ich zunächst an einem Beispiel untersuchen, ob in der Nähe von a $f(x) \approx P_n(x)$ wirklich gilt.

Hierzu betrachte ich die Exponentialfunktion $f(x)=e^x, \ x \in \mathbb{R}$, bei der die Ableitungen besonders leicht anzugeben sind:

$$f^{(i)}(x)=e^x \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Ich wähle die Entwicklungsstelle $a=0$ (die Stelle, an der die Ableitungen gebildet werden und an der die Approximation durchgeführt wird), und erhalte $\exp^{(i)}(0)=1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. So kann ich die Taylorfunktionen P_n für jede Ordnung $n \in \mathbb{N}$ sofort ohne viel zu rechnen angeben, indem ich diese Exponentialfunktion in (5) einsetze:

Dabei erhalte ich für den Grade $n=1$

$$P_1: \to 1+\frac{x^1}{1!} \qquad mit\, x \in \mathbb{R}$$

und für die Taylorfunktionen höherer Ordnung entsprechende

$$P_2: \to 1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!} \qquad mit\, x \in \mathbb{R}$$

$$P_3: \to 1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} \qquad mit\, x \in \mathbb{R} \qquad , usw.$$

An den Graphen der Taylorfunktionen (vgl. Fehler: Referenz nicht gefunden) lese ich zwei Eigenschaften ab:

- An der Entwicklungsstelle stimmen alle P_n mit e^x überein, was ich ja beim Benutzen der Taylorfunktion erwartet habe.
- Bei steigender Ordnung von n in P_n schmiegt sich der Graph immer mehr an e^x an, was heißt, dass die Approximation sich verbessert, wie ich in schon erwähnt habe.

Nun kann schon mit der einfachen Taylorfunktion P_3 die Eulersche Zahl e ungefähr berechnen. Die Eulersche Zahl erhalte ich wenn ich den Funktionswert von e^x an der Stelle x=1 berechne. In P_3 ergibt dieser Funktionswert $2{,}6666\ldots$, was e mit $2{,}718281828\ldots$, mit einem Fehler von nur zwei Prozent, recht nahe kommt, wobei auch beachtet werden muss, dass die Annäherung bei steigender Ordnung optimiert werden kann. P_3 ist in der Nähe von 0 anscheinend ein guter Ersatz für die Exponentialfunktion.

Nun untersuche ich den allgemeinen Zusammenhang zwischen f und P_n, wozu ich das *Restglied* $R_n(x)$ definiere: $R_n(x)=f(x)-P_n(x) \quad \textit{für alle} \quad x\in\mathbb{R}. \qquad (6)$

Das Restglied gleicht gewissermaßen den Unterschied zwischen der Funktion f und der Taylorfunktion P_n aus und ist ein Funktionsterm der Funktion $R_n: x\rightarrow R_n, x\in\mathbb{R}$.

Aufgrund des begrenzten Umfangs dieser Facharbeit möchte ich die zwei gängigsten Darstellungsmöglichkeiten des Restgliedes nicht herleiten, sondern nur nennen: einmal das Restglied in Integralform und das Lagrangesche Restglied.

- Satz von Taylor mit dem *Restglied in Integralform*:
  Ist f auf einer zusammenhängenden Menge A definiert und (n+1)-fach stetig-differentierbar und ist $a\in A$ und P_n die Taylorfunktion der Ordnung n an der Stelle a, dann gilt für alle $a\in A$:
  $$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i+\int_a^x\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \qquad (7)$$
- Satz von Taylor mit *Lagrangeschem Restglied*:
  Ist f auf einer zusammenhängenden Menge A definiert und (n+1)-fach stetig-differentierbar und ist $a\in A$, dann gibt es zu jedem $x\in A\setminus\{a\}$ eine zwischen a und x gelegene Stelle z, so dass gilt:
  $$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i+\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\cdot f^{(n+1)}(z). \qquad (8)$$

5.3.1 das Restglied der alternierenden Reihe

Für das Restglied einer alternierenden Reihe (vgl. Kapitel 4.3.3) gilt folgendes:

Wenn in einer konvergenten alternierenden Reihe nur die ersten n Glieder berücksichtigt werden, stimmt das Vorzeichen des Restgliedes R_n mit dem des ersten weggelassenen Gliedes a_{a+1} überein und ist absolut gesehen kleiner als dieses:

$$|R_n|<|a_{n+1}|.$$

5.4 die Taylorreihe

In 3.3 habe ich die Restglieder aufgeführt und kann somit die in 4.2 hergeleitete Taylorfunktion bzw. MacLaurin-Funktion mit diesem vervollständigen, so dass ich die zu approximierende Funktion f nicht nur ungefähr, sondern genau angeben kann. Ich kann also sagen:

Ist f eine beliebig oft differentierbare Funktion mit zusammenhängender Argumentenmenge A und $a\in A$, so können wir für jedes $n\in\mathbb{N}$ Taylorfunktion P_n zu f an der Stelle a bilden. Für alle $x\in A$ und alle $n\in\mathbb{N}$ gilt nach (7) und (8):

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i+R_n(x),\quad \text{wobei}$$

$$R_n(x)=\int_a^x\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt=\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\cdot f^{(n+1)}(z) \qquad (9)$$

mit einer zwischen a und x gelegenen Stelle z.

Durch (9) ist für jedes $x\in A$ eine bestimmte Folge $(R_n(x))$ definiert. Wenn nun für eine Stelle $x\in A$ das Restglied 0 ist, also wenn die Restgliedfolge gegen 0 konvergiert, erhalte ich aus (9) für die Funktion f(x) diese Darstellung:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i. \qquad (10)$$

Die Funktion ist nach Potenzen von $(x-a)$ entwickelt. Dieser Term $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i$ ist die *Taylorreihe* von f an der Stelle a.

Ist die Entwicklungsstelle $a=0$, erhalte ich die *MacLaurinreihe*: $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}f^{(i)}(0)x^i \qquad (11)$.

Die Konvergenz der Restgliedfolge gegen 0 ist also, wie schon oben erwähnt, die Voraussetzung für die Taylorreihe überhaupt. Diese Konvergenz kann ich durch das, im Kapitel 4, gezeigten, Verfahren prüfen: Als erstes die Grenzwertuntersuchung und als zweites die Bestimmung der Konvergenz mit Hilfe des Quotienten-, Wurzel- oder des Leibnizschen Konvergenzkriteriums. Allgemein kann ich also sagen, dass wenn $\sum_{n\to\infty}R_n(x)=0$ für alle Stellen x des Teilintervalls I von A zutrifft, ist durch (10) eine Darstellung der Funktion f im Intervall I als Reihe gegeben.

6 Anwendungsbeispiele

Hier möchte ich die im vorigen Kapiteln gewonnenen Erkenntnisse verwenden, um mit ihnen Aufgaben zu lösen, die Grenzen der Taylorreihenentwicklung aufzuzeigen und weitere Anwendungsgebiete zeigen.

6.1 Taylorreihenentwicklung der Exponentialfunktion

Ich möchte für die Exponentialfunktion $f(x)=e^x$ die Taylorreihe (vgl. auch Fehler: Referenz nicht gefunden) bestimmen und danach die Eulersche Zahl e auf zehn Nachkommastellen angeben, nachdem ich in Kapitel 6.1 e ja schon ungefähr berechnet habe.

Das Besondere an $f(x)=e^x$ ist, dass alle Ableitungen mit ihr übereinstimmen:

$$f(x)=e^x \quad , \quad f^{(i)}(x)=e^x$$

Der Einfachheit halber verwende ich die Entwicklungsstelle a=0, kann so die MacLaurinreihe (11) anwenden und erhalte

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+R_n(x).$$

Nun muss ich die Folge der Restglieder $R_n(x)$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ untersuchen und beweisen, dass diese gegen 0 konvergiert, damit die beliebig genaue Approximation gewährleistet ist.
Hierzu benutze ich die Langrangesche Darstellung (8):
Es gibt eine zwischen 0 und x gelegene Stelle z, so dass

$$R_n(x) = \frac{x^{x+1}}{(n+1)!} \cdot e^z .$$

Ich betrachte zunächst die Teilfolgen $\frac{x^{x+1}}{(n+1)!}$ und $\frac{x^{x+1}}{(n+1)!}$ der Restgliedfolge $R_n(x)$.
Mit dem Quotientenkriterium (vgl. Kapitel 4.3.1) ergibt sich für $\frac{x^{x+1}}{(n+1)!}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{x+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = r \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x^{x+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} = r \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = r$$

wobei wegen des konstanten x der Nenner $(n+1)!$ bei wachsendem n schneller wächst als der Zähler $n!$, woraus $r<1$ folgt. Damit ist die Konvergenz dieser Folge nachgewiesen.
Wenn $x \leq 0$, dann kann ich wegen der Monotonie der e-Funktion e^z durch e^0 nach oben abschätzen und erhalte

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^0 = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist die Folge eine Nullfolge.
Wenn $x>0$, dann kann ich wegen der Monotonie der e-Funktion e^z durch e^x nach oben abschätzen und erhalte

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^x \qquad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^x$ ist das Produkt aus der Nullfolge $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ mit der konstanten Folge e^x, also ist sie ebenfalls eine Nullfolge.
Somit konvergieren alle Restgliedfolgen $R_n(x)$ gegen 0 und die e-Funktion kann für alle $x \in \mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe dargestellt werden.
Mit Restgliedfolge $R_n(x) = \frac{x^{x+1}}{(n+1)!} \cdot e^z$ kann ich e nicht direkt berechnen, deswegen muss ich mich eines Tricks bedienen: Ich weiß auf jeden Fall, dass $e<3$, weswegen ich für e also 3 einsetzen kann. Da ich e an der Stelle $x=1$ berechnen möchte, setze ich dieses ein, ebenso setze ich für z 1 ein. Somit erhalte ich

$$R_n(x) < \frac{3}{(n+1)!} .$$

Ich möchte e auf zehn Nachkommastellen genau berechnen, also darf die Differenz zwischen der e-Funktion und der Taylorfunktion $\sum_{i=o}^{\infty} \frac{1}{i!}$ nicht mehr als 1^{-10} betragen. Da das Restglied diese Differenz ausgleicht, darf das Restglied nicht größer als 1^{-10} sein. Es muss gelten:

$$R_n(x) < \frac{3}{(n+1)!} < 1^{-10}.$$

Durch Ausprobieren finde ich $R_{12}(x) < 4{,}8177\ldots \cdot 1^{-10} > 1^{-10}$ und

$$R_{13}(x) < 3{,}4412\ldots \cdot 1^{-11} < 1^{-10.}$$

Also benötige ich 13 Glieder, um e auf 10 Nachkommastellen genau anzugeben.

Dazu berechne ich jetzt e:

$$e \approx 1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} + \frac{1^7}{7!} + \frac{1^8}{8!} + \frac{1^9}{9!} + \frac{1^{10}}{10!} + \frac{1^{11}}{11!} + \frac{1^{12}}{12!} + \frac{1^{13}}{13!}$$

$$e \approx 2{,}7182818284|4675900231\ldots$$

$$e = 2{,}7182818284|5904523536\ldots \qquad \textit{(Literaturwert)}$$

Wenn ich den Literaturwert wenn dem von mir errechneten vergleiche, sehe ich, abgesehen von der Tatsache, dass das Ergebnis auf zehn Nachkommastellen gerundet nur noch auf neun Nachkommastellen mit e übereinstimmt, so habe ich die Berechnung von e mit der Taylorreihe erfolgreich durchgeführt.

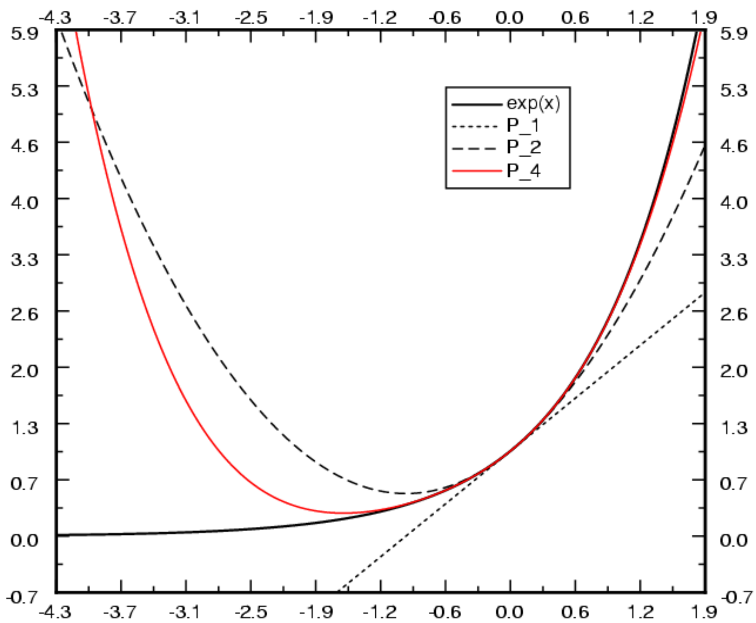

Abbildung 2: Die Exponentialfunktion und ihre Taylorfunktionen

6.2 Taylorreihenentwicklung der Kosinusfunktion

Ich möchte mit einer Taylorreihe die Kosinusfunktion approximieren (vgl. Abbildung 3), um auf diese Weise Funktionswerte der Kosinusfunktion zu berechnen. Und zwar möchte ich den Funktionswert der Kosinusfunktion an der Stelle x=2 mit der Taylorreihe auf zehn Nachkommastellen angeben.

Zuerst bilde ich die Ableitungen der Kosinusfunktion an der Stelle 0:

$$\begin{array}{rcccrcr} f(x) & = & \cos(x) & \Rightarrow & f(0) & = & 1 \\ f^{(1)}(x) & = & -\sin(x) & \Rightarrow & f^{(1)}(0) & = & 0 \\ f^{(2)}(x) & = & -\cos(x) & \Rightarrow & f^{(2)}(0) & = & -1 \\ f^{(3)}(x) & = & \sin(x) & \Rightarrow & f^{(3)}(0) & = & 0 \\ f^{(4)}(x) & = & \cos(x) & \Rightarrow & f^{(4)}(0) & = & 1 \\ & & \ldots & & & & \end{array}$$

Diese Ableitungswerte setze ich in die MacLaurinreihe (11) ein und erhalte:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot\frac{x^{2i}}{(2i)!}=\frac{1}{0!}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{1!}\cdot 0\cdot 1+\frac{1}{2!}\cdot(-1)\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot 0\cdot x^3+\frac{1}{4!}\cdot 1\cdot x^4-\ldots+R_n(x)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot\frac{x^{2i}}{(2i)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+R_n(x),$$

wobei ich für $R_n(x)$ wieder die Lagrangesche Darstellung (8) wähle und erhalte für eine zwischen 0 und x gelegene Stelle z, so dass gilt:

$$R_n(x)=\frac{x^{x+1}}{(n+1)!}\cdot\cos^{n+1}(z) \qquad z\in\mathbb{R}.$$

Nun muss ich wieder zeigen, dass die Restgliedfolge $R_n(x)$ gegen 0 konvergiert, damit die Darstellung der Kosinusfunktion gewährleistet werden kann.

Da $\left|\cos^{n+1}(z)\right|\leq 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $z\in\mathbb{R}$ erhalte ich diese Abschätzung:

$$\left|R_n(x)\right|\leq\frac{|x|^{x+1}}{(n+1)!} \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ und } z\in\mathbb{R}.$$

Bei der Herleitung der Taylorreihe für die Exponentialfunktion e^x habe ich schon bewiesen, dieser Term $\frac{|x|^{x+1}}{(n+1)!}$ gegen 0 konvergiert. Somit habe ich gezeigt, dass die Restgliedfolge gegen 0 konvergiert. Die Kosinusfunktion kann also durch die Taylorreihe dargestellt werden.

Da die Genauigkeit auf zehn Nachkommastellen des mit dieser Taylorreihe berechneten Funktionswertes für $\cos(2)$ höchstens eine Differenz von 1^{-10} zu $\cos(2)$ zulässt, darf der Betrag des Restgliedes nicht größer als sein (vgl. Kapitel 6.2).

Zur Bestimmung der Anzahl der benötigten Glieder der Taylorreihe benutze ich die spezielle Form des Restgliedes bei einer alternierenden Reihe, da die Kosinusfunktion ja zwischen $f(x)=1$ und $f(x)=-1$ alterniert: $\left|R_n\right|<\left|a_{n+1}\right|$.

Wenn ich nun das allgemeine Glied der Taylorreihe einsetze, erhalte ich

$$\left|R_n\right| < \left|(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1)!)}\right| \leq 1^{-10}.$$

Ich setze für x 2 ein und finde durch Ausprobieren

$$\left|R_8(x)\right| < \left|-4,094\ldots \cdot 1^{-11}\right| < 1^{-10}.$$

Ich benötige somit 8 Glieder der Taylorreihe, um die gewünschte Genauigkeit zu erhalten.

Jetzt berechne ich $\cos(2)$:

$$\cos(2) \approx 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - \frac{2^{14}}{14!}$$

$\cos(2) \approx \mathit{-0{,}4161468365|066}\ldots$

$\cos(2) = \mathit{-0{,}4161468365|471}\ldots$ *(Literaturwert)*.

Bei diesem Ergebnis muss ich ebenfalls beachten, dass Genauigkeit sich hier nicht auf Rundungen auf die zehnte Nachkommastelle bezieht. Somit habe ich die Berechnung von $\cos(2)$ erfolgreich durchgeführt.

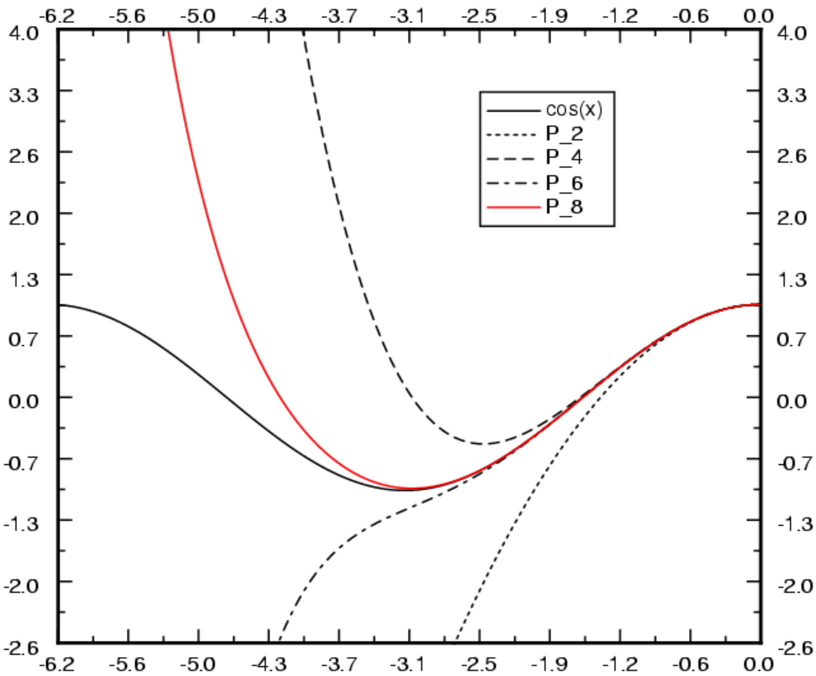

Abbildung 3: Die Kosinusfunktion und ihre Taylorfunktionen

6.3 Warum eine Taylorreihenentwicklung nicht immer möglich ist

Bisher bin ich davon ausgegangen, dass ich, wenn eine Funktion f an meiner Entwicklungsstelle a so oft differenzierbar ist, wie ich es benötige, und zudem stetig ist, so kann ich dort, eine Taylorreihenentwicklung vornehmen. Diese Bedingungen sind zwar notwendig aber nicht hinreichend. Diese Funktion braucht sich trotzdem nicht in die Taylorreihe entwickeln zu lassen. Das Restglied R_n braucht nicht bei wachsendem n gegen 0 zu streben, auch wenn das Gebiet hinreichend klein gewählt ist.

Ein Beispiel hierfür ist $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\quad für\ x\neq 0\quad und\ f(0)=0$, die auch für x=0 mit sämtlichen Ableitungen in jedem Punkt stetig ist. Eine besondere Eigenschaft dieser Funktion ist, dass in x=0 der Funktionswert für alle Ableitungen 0 ist: $f^{(n)}=0$.
In der Taylorformel verschwinden also alle Koeffizienten des Approximationspolynoms. Daraus folgt, dass das Restglied gleich der Funktion selbst bleibt, wie n auch gewählt wird; es strebt, außer für x=0, nicht gegen 0, da die Funktion für jedes $x\neq 0$ positiv ist. Somit kann diese Funktion in der Stelle x=0 nicht durch eine Taylorreihe dargestellt werden.

6.4 weitere Anwendungsmöglichkeiten

Neben den in dieser Facharbeit benutzten Berechnung der Funktionswerte von Funktionen gibt es noch viele andere Anwendungsmöglichkeiten der Taylorreihe. Diese lassen sich grob in mathematische und physikalische gliedern. Ich muss zu den folgenden Punkten anmerken, dass ich die Informationen aus dem Internet, genauer gesagt aus zwei speziellen Mathematik- und Physik-Newsgroups, bezogen habe und ihre Anwendungsmöglichkeiten nur nenne und nicht weiter erläutere, da sie meine Fähigkeiten, sie im Speziellen zu verstehen, überschreiten.

6.4.1 mathematische Anwendungsmöglichkeiten

Die Taylorreihe wird folgendendermaßen angewandt:

- beim Lösen von Differentialgleichungen
- beim Vereinfachen von komplizierten Gleichungen, so dass Aussagen über diese gemacht werden können
- beim Entwickeln von Näherungsformeln für schwierige mathematische Probleme, wie zum Beispiel der Berechnung von Bogenlängen der Sinusfunktion
- bei der Entwicklung von Statistiken, zum Beispiel bei der statistischen Verteilung
- als ein vor einigen Jahren verwandter Lösungsalgorithmus in Taschenrechnern zur Berechnung der Funktionswerte elementarer Funktionen wie $\sin(x), \cos(x), e^x \ldots$

6.4.2 physikalische Anwendungsmöglichkeiten

Die Taylorreihe wird in folgenden Gebieten angewandt:

- in der Multipolentwicklung, in der es um die Entwicklung einer Reihe geht, die die Verteilung von Feldquellen, zum Beispiel Elektronen als Ladungsträger im elektrischen Feld, beschreibt
- beim Übergang von der relativistischen Mechanik, die sich mit der Relativitätstheorie beschäftigt, in die als Grenzfall zwischen dieser und der Quantenmechanik gesehenen klassischen Mechanik
- beim Berechnen von Eigenwertaufgaben, bei denen es um Charakteristika von Elementarteilchen geht, welche besonders in der Quantentheorie Anwendung finden
- beim Lösen von Differentialgleichungen wie Feld-, Schwingungs- und Kraftgleichungen

- beim Lösen von komplizierten Gleichungen, wobei dem bei der Annäherung gemachte Fehler keine große Bedeutung zukommt, da dieser im Vergleich zu zum Beispiel gemessenen und damit mit Messfehlern behafteten Größen gering ausfällt
- beim Arbeiten mit dem physikalischen Pendel, was durch die Taylorreihe erst ermöglicht wird
- bei der Bahnbestimmung geostationärer Satelliten durch die Taylorreihenintegration

7 Literaturverzeichnis

- Heinrich Auchter: Brook Taylor - der Mathematiker und Philosoph. Druckerei und Verlag wissenschaftlicher Werke Triltsch, Würzburg 1937.
- Oliver Montenbruck: Ephemeridenberechnung und Bahnbestimmung geostationärer Satelliten mit Hilfe der Taylorreihenibtegration. Verlag der Bayrischen Akademie der Wissenschaften, München 1991.
- R. Courant: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Springer-Verlag, Berlin ^{3}1969.
- W. I Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik - Teil 1. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.
- Bronstejn, Il'ja N.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main ^{2}1995.
- Harald Scheid: Duden rechnen und Mathematik: Lexikon für Schule und Beruf. Dudenverlag, Mannheim ^{4}1985.
- Wolfgang Müller: Duden - das Fremdwörterbuch. Dudenverlag, Mannheim ^{4}1982.
- Friedrich Kluge: Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache. Berlin ^{22}1989.
- http://www.britannica.com
- news: de.sci.mathematik, <20000314.18295840@mis.configured.host>.
- news: de.sci.physik, <20000315.17341223@mis.configured.host>.

Abbildung 1: Joseph Goupy, Brook Taylor-Miniatur (Ausschnitt). National Portrait Gallery, London.